



基于双特征值极限分布的合作频谱感知算法^{*}

赵知劲^{1,2}, 胡伟康¹, 王海泉¹

(1. 杭州电子科技大学通信工程学院 杭州 310018;

2. 中国电子科技集团第36研究所通信系统信息控制技术国家级重点实验室 嘉兴 314001)

摘要:以最大最小特征值之差作为检测统计量,从提高算法判决门限估计精度出发,利用双特征值极限分布,用双特征值估计判决门限,提出了基于双特征值极限分布的频谱感知算法。相比于单特征值门限方法,理论上证明了用双特征值极限分布估计的门限小于或等于用单特征值极限分布估计的门限,提高了算法检测性能。仿真结果表明,该算法不受噪声不确定性影响,不需要主用户信息,并且在低虚警概率、采样次数相对少的情况下,检测性能优于最大最小特征值之差频谱感知算法。

关键词:频谱感知;随机矩阵理论;双特征值极限分布;门限估计

doi: 10.3969/j.issn.1000-0801.2014.04.012

Cooperative Spectrum Sensing Algorithm Based on Double Eigenvalue Limiting Distribution

Zhao Zhijin^{1,2}, Hu Weikang¹, Wang Haiquan¹

(1. School of Telecommunication Engineering of Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China;

2. State Key Lab of Information Control Technology in Communication System of No.36 Research Institute,
China Electronic Technology Corporation, Jiaxing 314001, China)

Abstract: A spectrum sensing algorithm using double eigenvalue limiting (DEL) distributions was presented. The difference between the maximum and the minimum eigenvalue was exploited as the test statistic. The double eigenvalue were used to estimate a threshold based on the double eigenvalue limiting distributions to heighten an accuracy of the threshold. Compared with the algorithm of single eigenvalue, the theoretical analyses demonstrate that the threshold estimated by DEL was less than its threshold and the performance of DEL was improved. In addition, simulations results show the proposed algorithm needs neither the prior acknowledge of the signal transmitted from primary user, nor the noise power in advance, and gains better performance against the short of sampling number than the difference between the maximum and the minimum eigenvalue (DMM) algorithm.

Key words: spectrum sensing, random matrix theory, double eigenvalue limiting distribution, threshold estimation

1 引言

快速增长的无线业务需求导致了无线通信中的频谱资源缺乏,然而研究表明频谱利用率表现出高度的不均衡

性,存在频谱利用率很低的授权频段^[1]。认知无线电(cognitive radio, CR)^[2]允许认知用户(secondary user, SU)利用授权主用户(primary user, PU)的空闲频段进行通信,是提高频谱利用率的一种新技术,而频谱感知是认知无线

^{*} 电科院预研基金资助项目(No.41101040102)

电的关键技术之一。经典的频谱感知技术主要有循环平稳特征检测、匹配滤波器检测和能量检测等^[1,3,4]。这些经典频谱感知技术都有各自特定的应用场合和缺陷^[5,6],例如对微弱信号的检测能力较差,容易受到噪声不确定性的影响等。

为了克服经典感知技术的缺点,Zeng 等人^[7,8]提出了基于随机矩阵理论(random matrix theory, RMT)的频谱感知技术,迅速成为了当前的研究热点^[9-12]。至今,基于 RMT 的频谱感知技术包括双特征值门限(double eigenvalue threshold, DET)^[13]的判决方法、最大最小特征值(maximum minimum eigenvalue, MME)^[7]算法、最大最小特征值之差(difference between the maximum eigenvalue and the minimum eigenvalue, DMM)^[14]算法等,这些算法大大提高了频谱感知性能,但是存在一个相同的问题:受采样次数的限制,估计的判决门限不够准确,在采样次数相对少的情况下,检测性能有待提高^[15]。针对上述问题,本文通过对认知用户接收信号协方差矩阵的最大最小特征值极限分布的研究,提出了一种基于双特征值极限分布(double eigenvalue limiting, DEL)的频谱感知算法。该算法从提高判决门限的估计精度出发,利用最大最小特征值极限分布的不同,得到较准确的门限值,然后通过统计判决实现频谱感知。DEL 算法提高了在低虚警概率且采样次数较少情况下的检测性能,同时仍具有 MME、DMM 等算法的优点,即不受噪声不确定性影响、不需要知道 PU 信号的先验知识等。

2 信号模型及采样协方差矩阵

假设系统有 M 个 SU 参与感知过程,在 k 时刻,第 i 个 SU 的接收信号及噪声的采样信号分别表示为 $x_i(k)$ 和 $w_i(k)$, PU 发射信号为 $s(k)$ 。定义向量矩阵如下:

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_M]^T \quad (1)$$

$$W = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_M]^T \quad (2)$$

$$S = [s \quad s \quad \cdots \quad s]^T \quad (3)$$

其中, X 表示 M 个 SU 接收信号的向量矩阵, $x_i = [x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(N)]^T (i=1, 2, \dots, M)$ 表示第 i 个 SU 采样得到的接收信号向量, N 为采样点数; W 表示噪声向量矩阵, $w_i (i=1, 2, \dots, M)$ 表示第 i 个 SU 采样得到的噪声向量; S 表示 M 个 SU 接收到的 PU 发射机信号向量矩阵, s 表示每个 SU 采样得到的发射信号向量。因此, X 可以表示成 $M \times N$ 维的矩阵:

$$X = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \cdots & x_M(N) \end{bmatrix} \quad (4)$$

如果把 PU 信号存在假设为 H_1 , 把 PU 信号不存在假设为 H_0 , 则频谱感知可以看作是一个二元假设检验, 其假设检验模型如下:

$$X = \begin{cases} W, & H_0 \\ S+W, & H_1 \end{cases} \quad (5)$$

假设发射信号 S 与 W 噪声不相关, 且噪声 W 是均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声。用 $\widehat{R}_x(N)$ 、 $\widehat{R}_s(N)$ 和 $\widehat{R}_w(N)$ 分别表示接收信号、PU 信号和噪声的采样协方差矩阵, 其表达式表示如下:

$$\widehat{R}_x(N) = \frac{1}{N} X X^T \quad (6)$$

$$\widehat{R}_s(N) = \frac{1}{N} S S^T \quad (7)$$

$$\widehat{R}_w(N) = \frac{1}{N} W W^T = \sigma^2 I_M \quad (8)$$

其中 I_M 表示 M 阶单位矩阵。因此, 式(5)的假设检验模型可表示如下:

$$\widehat{R}_x(N) = \begin{cases} \sigma^2 I_M, & H_0 \\ \widehat{R}_s(N) + \sigma^2 I_M, & H_1 \end{cases} \quad (9)$$

3 基于 DEL 的频谱感知算法及性能

3.1 检测统计量

令矩阵 $\widehat{R}_x(N)$ 和 $\widehat{R}_s(N)$ 的最大特征值为 $\lambda_{\max}$ 和 $\rho_{\max}$, 根据式(9)可得:

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \sigma^2, & H_0 \\ \rho_{\max} + \sigma^2, & H_1 \end{cases} \quad (10)$$

无论 PU 信号存在与否, 接收信号协方差矩阵的最小特征值都为 σ^2 。

基于以上分析, 利用矩阵 $\widehat{R}_s(N)$ 的最大最小特征值之差作为检测统计量, 得到基于接收信号相关矩阵特征值的 DEL 算法的检测统计量为:

$$T_{\text{DEL}} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \begin{cases} \rho_{\max}, & H_1 \\ 0, & H_0 \end{cases} \quad (11)$$

因此, 其判决规则为:



$$T_{\text{DEL}} \begin{cases} \leq 0 \\ > 0 \end{cases} \begin{matrix} H_0 \\ H_1 \end{matrix} \quad (12)$$

式(12)表示,当 T_{DEL} 大于0时, H_1 成立, T_{DEL} 当小于或等于0时, H_0 成立。这是理想条件下的判决规则,门限 γ_{DEL} 为0。在实际系统中,由于感知时间有限,采样次数 N 有限,所以 γ_{DEL} 与理想值有偏差, γ_{DEL} 的设置影响算法性能。下面分析 DEL 算法门限值的确定。

3.2 检测门限的确定

当 PU 信号不存在时, $\widehat{R}_x(N)=\widehat{R}_w(N)$,而噪声协方差矩阵 $\widehat{R}_w(N)$ 为 Wishart 随机矩阵,Wishart 随机矩阵的最大最小特征值的特性可由如下定理^[16-19]描述。

定理 1^[17-19] 当噪声为实信号时,令 $A(N)=\frac{N}{\sigma^2}\widehat{R}_w(N)$,

$$v=(\sqrt{N-1}+\sqrt{M})\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}+\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{\frac{1}{3}}, u=(\sqrt{N-1}+\sqrt{M})^2,$$

$$\xi=(\sqrt{N-1}-\sqrt{M})\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ 和 } \zeta=(\sqrt{N-1}-\sqrt{M})^2,$$

假设 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = c(0 < c < 1)$, 则 $\frac{\lambda_{\max}(A(N))-u}{v}$ 和 $\frac{\lambda_{\min}(A(N))-\zeta}{\xi}$

都依概率 1 收敛于 1 阶 Tracy-Widom 分布 $F_1(\theta)$,其中 $\lambda_{\max}(A(N))$ 和 $\lambda_{\min}(A(N))$ 分别表示随机矩阵 $A(N)$ 所对应的最大特征值和最小特征值。

定理 2^[16] 根据 M-P 律可得,当 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = c(0 < c < 1)$ 时,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \approx \sigma^2(1-\sqrt{c})^2, \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\max} \approx \sigma^2(1+\sqrt{c})^2.$$

利用 DEL 算法进行频谱感知时,虚警概率 P_f 为:

$$\begin{aligned} P_f &= \Pr(T_{\text{DEL}} \geq \gamma_{\text{DEL}} | H_0) \\ &= \Pr(\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \geq \gamma_{\text{DEL}} | H_0) \end{aligned} \quad (13)$$

由定理 2 可得 $\lambda_{\min}$ 与 $\lambda_{\max}$ 的极限近似值分别为:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \approx \sigma^2(1-\sqrt{c})^2 \quad (14)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\max} \approx \sigma^2(1+\sqrt{c})^2 \quad (15)$$

用 $\lambda_{\min}$ 的极限近似代替 $\lambda_{\min}$,则代入式(13),可得门限的估计为 R_1 :

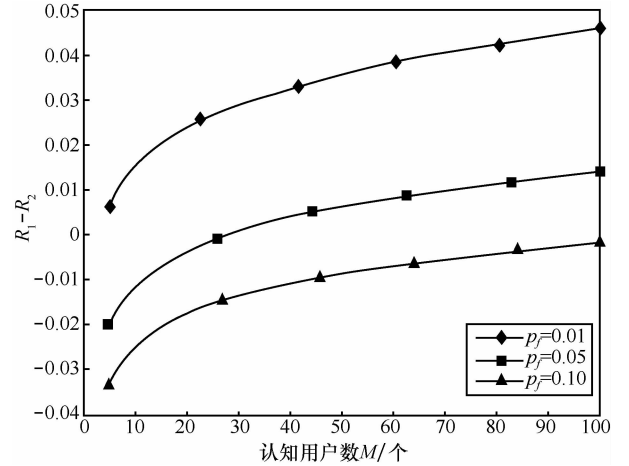
$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sigma^2}{N} [vF_1^{-1}(1-P_f) + u] - \lambda_{\min} \\ &= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{N} [vF_1^{-1}(1-P_f) + u] - (1-\sqrt{c})^2 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)是 DMM 算法的门限值^[14]。同理,用 $\lambda_{\max}$ 的极限近似代替 $\lambda_{\max}$,可得门限的估计为 R_2 :

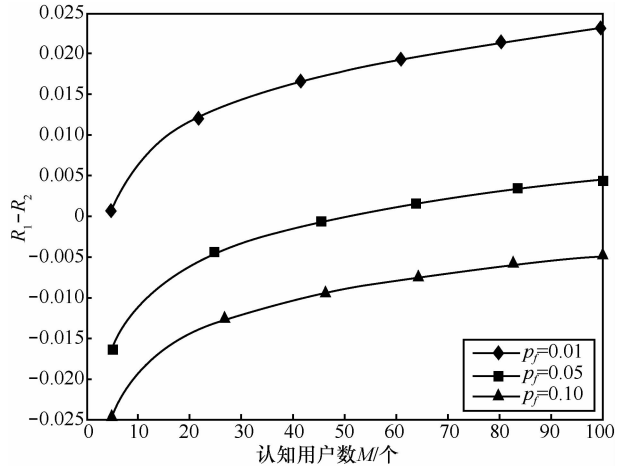
$$\begin{aligned} R_2 &= \lambda_{\max} - \frac{\sigma^2}{N} [\xi F_1^{-1}(P_f) + \zeta] \\ &= \sigma^2 \left\{ (1+\sqrt{c})^2 - \frac{1}{N} [\xi F_1^{-1}(P_f) + \zeta] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

由于感知时间有限长,所以采样次数 N 是有限的,即 N 不会趋向于无穷大。当 N 有限时,由式(14)和式(15)计算得到的最小特征值的近似值 $\lambda_{\min}$ 是偏小的,而最大特征值的近似值 $\lambda_{\max}$ 是偏大的。因此由式(16)和式(17)可以发现,当 N 不足够大时, R_1 和 R_2 都大于理论值。

假设噪声方差为 1; N 为 500 和 1 000, P_f 为 0.01、0.05 和 0.1 时, R_1 与 R_2 之差与 M 的关系曲线如图 1 所示; M 为 20 和 30, P_f 为 0.01、0.05 和 0.1 时, R_1 与 R_2 之差与 N 的关系曲线如图 2 所示。由图可见, R_1 与 R_2 的大小关系与采样次数 N 、用户数 M 和虚警概率 P_f 有关。当 $P_f=0.01$ 时, R_1 大于 R_2 ;随着 P_f 的增大, R_1 与 R_2 的大小关系与 N 和 M 取值有关;当 P_f 和 N 一定时,随着 M 的增大, R_1-R_2 的值也增

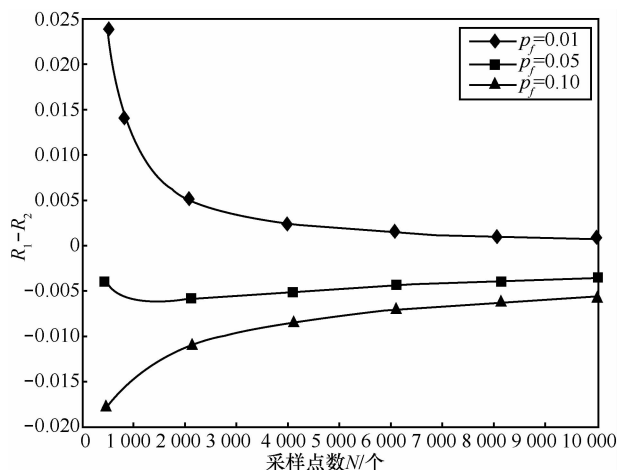
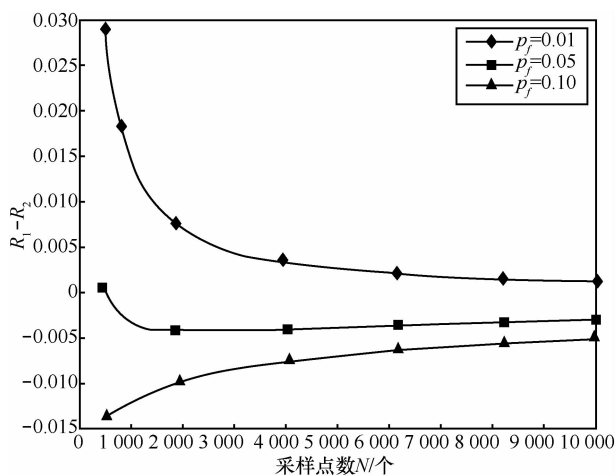


(a) $N=500$ 时, R_1-R_2 随 M 变化



(b) $N=1\,000$ 时, R_1-R_2 随 M 变化

图 1 R_1-R_2 随 M 变化特性曲线


 (a) $M=20$ 时, R_1-R_2 随 N 变化

 (b) $M=30$ 时, R_1-R_2 随 N 变化
图 2 R_1-R_2 随 N 变化特性曲线

大;当 P_f 和 M 一定时, R_1-R_2 不是 N 的单调函数,但随着 N 的增大, R_1-R_2 的绝对值都减小,并趋于常数。在虚警概率 P_f 一定时,检测门限越低,则检测概率越高。

基于上述分析,本文取 R_1 和 R_2 的最小值作为门限 γ_{DEL} ,即如式(18)所示:

$$\gamma_{\text{DEL}} = \min(R_1, R_2) \quad (18)$$

于是得到本文提出的 DEL 算法的判决准则为:

- 当 $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} \geq \gamma_{\text{DEL}}$ 时,检测到 PU 信号,判决 H_1 成立;
- 当 $\lambda_{\max} - \lambda_{\min} < \gamma_{\text{DEL}}$ 时,未检测到 PU 信号,判决 H_0 成立。

$$\text{令 } \beta_1 = \frac{1}{N} [v F_1^{-1}(1-P_f) + u] - (1 - \sqrt{c})^2, \beta_2 = (1 + \sqrt{c})^2 - \frac{1}{N}$$

$[\xi F_1^{-1}(P_f) + \zeta]$ 。综上所述,DEL 算法主要步骤如下:

(1) 由系统设定的采样次数 N 、用户数 M 和虚警概率 P_f ,计算得到 β_1 和 β_2 ;

(2) 按照式(6),计算接收信号的采样协方差矩阵 $\widehat{R}_x(N)$;

(3) 对矩阵 $\widehat{R}_x(N)$ 进行特征值分解,求得最大最小特征值,得到判决统计量 $T_{\text{DEL}} = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$;

(4) 估计得到噪声方差 σ^2 ,计算得到 $R_1 = \sigma^2 \beta_1$ 和 $R_2 = \sigma^2 \beta_2$;根据式(18)计算得到门限 r_{DEL} ;

(5) 根据判决准则进行检测。

假设 DMM 算法的门限值为 γ_{DMM} ,由于 DMM 算法仅用 R_1 作为检测门限,DEL 算法用 $\min(R_1, R_2)$ 作为检测门限 γ_{DEL} ,则根据 R_1 与 R_2 的不同,门限值 γ_{DMM} 与 γ_{DEL} 存在以下两种关系:

- 若 $R_1 > R_2$,则有 $\gamma_{\text{DMM}} > \gamma_{\text{DEL}}$;
- 若 $R_1 \leq R_2$,则有 $\gamma_{\text{DMM}} = \gamma_{\text{DEL}}$ 。

因此,比较 DMM 算法与 DEL 算法,式(19)恒成立:

$$\gamma_{\text{DMM}} \geq \gamma_{\text{DEL}} \quad (19)$$

两种算法都以最大特征值与最小特征值之差作为检测统计量,门限越低,检测概率就越高,检测性能就越好,因此根据式(19)判断可知,DEL 算法的性能优于 DMM 算法。

4 算法仿真与性能分析

本节将 DEL 算法与 DMM、MME 算法进行性能比较。仿真中主用户信号采用经过升余弦脉冲成型的 QPSK 调制信号,采样得到的离散数据具有很强的相关性。假设用户数 $M=20$,虚警概率 $p_f=0.01$,10 000 次的 Monte Carlo 模拟仿真各种算法。

图 3 给出了采样次数 $N=500$ 时,3 种算法的检测概率随信噪比变化曲线。由图可见,随着信噪比的增加,3 种算法的检测概率均有提高,DEL 算法的检测性能最好,当信噪比为 $-18 \sim -16$ dB 时,DEL 算法的检测概率比 DMM 高 0.08、比 MME 高 0.2 以上。比较 DEL 与 DMM 的性能曲线可以

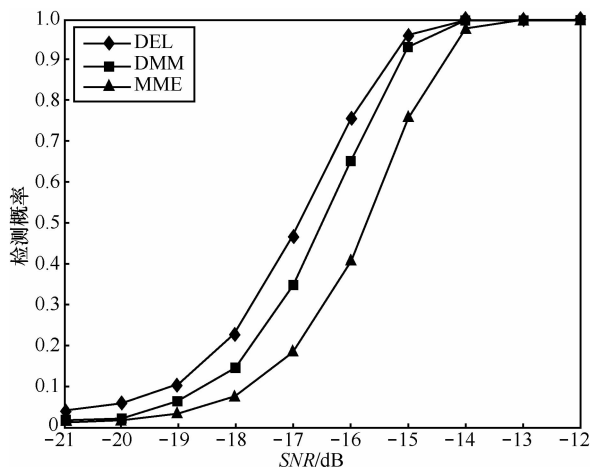


图 3 检测性能随 SNR 变化的曲线



发现, DEL 算法的性能曲线平行于 DMM 曲线增长。这是因为当 N 、 M 和 P_f 给定时, 门限值就确定了, 这时有 $R_1 > R_2$, 则有 $\gamma_{\text{DMM}} > \gamma_{\text{DEL}}$, 这与理论分析一致。

当信噪比 $\text{SNR} = -17$ dB 时, 检测概率随采样次数 N 变化的曲线如图 4 所示。从图中可以看出, DEL 算法的检测性能优于 DMM 和 MME 算法; 并且对于采样次数 N 较小的情况, DEL 算法的性能相比 DMM 和 MME 算法的优势更明显。

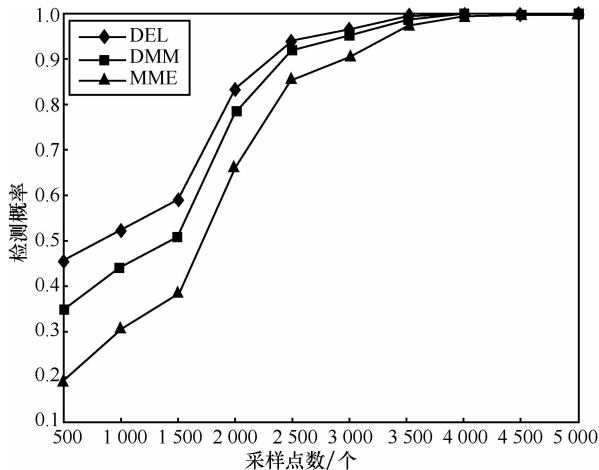


图 4 检测性能随采样次数变化的曲线

M 值分别取 10、15、20, N 取 500 和 1 000 时, 检测概率随信噪比的变化曲线如图 5 所示。由图可见, 随着 M 值的增加, DEL 算法性能比 DMM 算法好得越多, 这与 DEL 和 DMM 算法的门限值随着 M 值的增加区别越来越明显是相一致的; 而随着 N 值的增加, DEL 的检测概率提高幅度减小, 这与 DEL 的门限值稍小于 DMM 门限值是相一致。

由于 DEL 算法和 DMM 算法的检测统计量相同, DEL 算法仅比 DMM 算法多了 1 次乘法和 1 次选小运算, 所以 DEL 算法复杂度几乎与 DMM 算法一样。

5 结束语

本文根据随机矩阵双特征值的极限分布, 从提高门限值估计精度出发, 提出了基于双特征值极限分布的合作频谱感知算法。该算法继承了 MME、DMM 等算法的优点, 即不受噪声不确定性的影响, 无需知道主用户的信息等。同时, 该算法的复杂度没有增加。仿真结果表明, DEL 算法的频谱感知性能优于传统的频谱感知方法。

参考文献

1 Akyildiz I F, Lee W, Vuran M C, *et al.* Next generation/dynamic spectrum access/cognitive radio wireless networks: a survey.

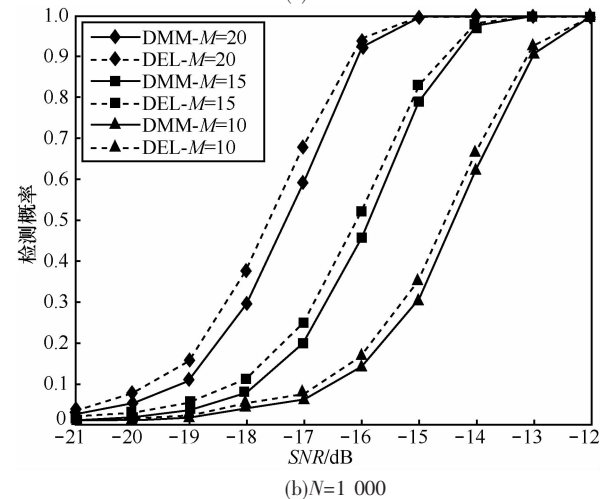
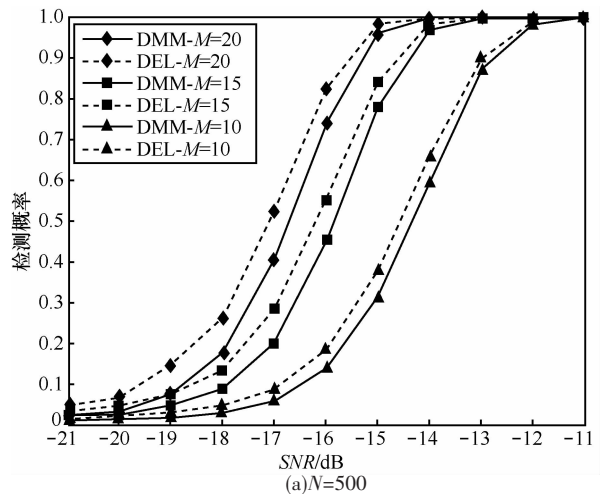


图 5 不同 M 值下 DMM 与 DEL 随信噪比变化的曲线

Computer Networks, 2006, 50(13): 2127~2159

2 Mitola J, Maguire G Q. Cognitive radio: making software radios more personal. IEEE Personal Communications, 1999, 6(4): 13~18

3 Cardoso L S, Debbah M, Bianchi P, *et al.* Cooperative spectrum sensing using random matrix theory. Proceedings of International Symposium on Wireless Pervasive Computing, Santorini, Greece, May 2008: 334~338

4 顾彬, 杨震, 胡海峰. 基于压缩感知信道能量观测的协作频谱感知算法. 电子与信息学报, 2012, 34(1): 14~19

5 金明, 李有明, 高洋. 基于广义特征值的合作频谱感知方法. 通信学报, 2013, 34(1): 105~110

6 庞娜. 认知无线电频谱感知技术研究. 北华大学学报(自然科学版), 2012, 13(5): 609~612

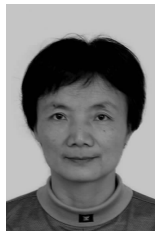
7 Zeng Y H, Liang Y C. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(6): 1784~1793

8 Zeng Y H, Liang Y C. Maximum eigenvalue detection theory and application. Proceedings of IEEE International Conference on Communications, Beijing, China, May 2008: 4160~4164

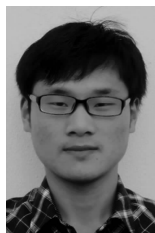
- 9 Wang L, Zheng B Y, Cui J W, *et al.* Cooperative spectrum sensing using free probability theory. Proceedings of IEEE Global Telecommunications Conference, Honolulu, USA, 2009: 1~5
- 10 许炜阳, 徐婷. 认知无线电系统中存在载波频偏的 OFDM 频谱感知技术. 电子科技大学学报, 2013, 42(3):355~359
- 11 Penna F, Garelo R, Spirito M A. Probability of missed detection in eigenvalue ratio spectrum sensing. Proceedings of IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications, Marrakech, Morocco, Oct 2009: 117~122
- 12 王润亮, 李浩, 黄焱等. 一种基于最大最小特征值的频谱感知改进算法. 计算机应用研究, 2012, 29(7): 2638~2641
- 13 曹开田, 杨震. 基于随机矩阵理论的 DET 合作频谱感知算法. 电子与信息学报, 2010, 32(1): 129~134
- 14 王颖喜, 卢光跃. 基于最大最小特征值之差的频谱感知技术研究. 电子与信息学报, 2010, 32(11): 2571~2575
- 15 邹卫霞, 丁奇, 周正等. 基于特征值极限分布的双门限频谱感知算法. 系统工程与电子技术, 2012, 34(3):588~591
- 16 Tulina A M, Verdu S. Random Matrix Theory and Wireless Communication. Hanover: Now Publisher Inc, 2004
- 17 Johansson K. Shape fluctuations and random matrices. Communications in Mathematical Physics, 2000, 209 (2): 437~476
- 18 Johnstone I M. On the distribution of the largest eigenvalue in principlecomponents analysis. The Annals of Statistics, 2001, 29(2): 295~327
- 19 Penna F, Garelo R. Cooperative spectrum sensing based on the limiting eigenvalue ratio distribution in Wishart matrices. IEEE

Communications Letters, 2009, 13(7): 507~509

[作者简介]



赵知劲,女,博士,杭州电子科技大学教授、博士生导师, 杭州电子科技大学通信工程学院党委书记, 主要研究方向为认知无线电、通信信号处理、自适应信号处理等。



胡伟康,男,杭州电子科技大学硕士生,主要研究方向为认知无线电及频谱感知算法的研究。



王海泉,男,博士,杭州电子科技大学研究员,主要研究方向为认知无线电、多天线系统及空时码的设计与应用等。

(收稿日期:2013-11-14)

(上接第 81 页)

[作者简介]



默罕莫德·默森,男,东南大学博士生,主要研究方向为车辆自组织网络、短距离无线通信等。



张瑞,男,东南大学博士生,主要研究方向为移动自组织网络、无线定位、短距离无线通信等。



毛云川,男,东南大学硕士生,主要研究方向为通信与信息系统、车辆自组织网络等。



沈连丰,男,东南大学教授、博士生导师,主要研究方向为移动互联网、移动自组织网络、短距离无线通信与泛在网络等。

(收稿日期:2014-02-11)